

# Université Laval

## ACT-7006 : Sujets Spéciaux I

*Par :*  
François Pelletier

- Courbes paramétriques (survol)

- Courbes paramétriques (survol)
- Analyse de composantes principales (survol)

- Courbes paramétriques (survol)
- Analyse de composantes principales (survol)
- Méthode des moments généralisée

- Courbes paramétriques (survol)
- Analyse de composantes principales (survol)
- Méthode des moments généralisée
- Méthode du maximum de vraisemblance

## Survol des méthodes de

- Interest rate modelling,  
James, J. and Webber, N., 2000  
(chapitres 15,16,17)

## Survol des méthodes de

- Interest rate modelling,  
James, J. and Webber, N., 2000  
(chapitres 15,16,17)
- Statistical models and methods for financial markets,  
Lai, T.L. and Xing, H., 2008  
(référence supplémentaire)

# Plan de présentation

1

Introduction

2

**Courbes paramétriques**

- **Survol de la méthode et utilisation**
- Courbe de Nelson-Siegel
- Analyse empirique
- Conclusion

3

Analyse de composantes principales

- Survol de la méthode et utilisation
- Analyse empirique
- Conclusion

4

Méthode des moments

- Description de la méthode
- Modèles de taux d'intérêt court-terme
- Détails de la méthode
- Données utilisées
- Applications

5

Méthode du maximum de vraisemblance

- Application aux modèles
- Estimation



# Caractéristiques

- Approximation des taux d'intérêt à partir de points connus

# Caractéristiques

- Approximation des taux d'intérêt à partir de points connus
- Données en coupe transversale

# Caractéristiques

- Approximation des taux d'intérêt à partir de points connus
- Données en coupe transversale
- Aucune valeur prédictive

# Caractéristiques

- Approximation des taux d'intérêt à partir de points connus
- Données en coupe transversale
- Aucune valeur prédictive
- Interpolation

# Types de courbes

- Splines cubiques et splines de lissage

# Types de courbes

- Splines cubiques et splines de lissage
- Courbes de Nelson et Siegel

# Types de courbes

- Splines cubiques et splines de lissage
- Courbes de Nelson et Siegel
- Fonction de base  $\phi_k(\tau)$

# Types de courbes

- Splines cubiques et splines de lissage
- Courbes de Nelson et Siegel
- Fonction de base  $\phi_k(\tau)$
- K paramètres  $\lambda_k$ , formant une somme



# Splines

- Fonctions polynomiales

# Splines

- Fonctions polynomiales
- Une fonction différente entre chaque points connus

# Splines

- Fonctions polynomiales
- Une fonction différente entre chaque points connus
- Basée sur la correspondance de dérivées premières

# Splines

- Fonctions polynomiales
- Une fonction différente entre chaque points connus
- Basée sur la correspondance de dérivées premières
- Demande l'estimation de nombreux paramètres

# Plan de présentation

1

Introduction

2

**Courbes paramétriques**

- Survol de la méthode et utilisation
- **Courbe de Nelson-Siegel**
- Analyse empirique
- Conclusion

3

Analyse de composantes principales

- Survol de la méthode et utilisation
- Analyse empirique
- Conclusion

4

Méthode des moments

- Description de la méthode
- Modèles de taux d'intérêt court-terme
- Détails de la méthode
- Données utilisées
- Applications

5

Méthode du maximum de vraisemblance

- Application aux modèles
- Estimation

- Taux à terme

$$f_0(\tau, t) = \beta_{0t} + (\beta_{1t} + \beta_{2t}\tau)e^{-\beta_{3t}\tau}$$

- Taux à terme

$$f_0(\tau, t) = \beta_{0t} + (\beta_{1t} + \beta_{2t}\tau)e^{-\beta_{3t}\tau}$$

- Taux instantanés

$$r(\tau, t) = \beta_{0t} + (\beta_{1t} + \beta_{2t}\tau)e^{-\beta_{3t}\tau}$$

Si on utilise la forme précédente pour modéliser le taux à terme, le taux instantané devient la moyenne pondérée des taux à terme

$$\begin{aligned}r(\tau, t) &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_0(s) ds \\&= \beta_0 + \left( \beta_{1t} + \frac{\beta_{2t}}{\beta_{3t}} \right) \frac{1 - e^{-\beta_{3t}\tau}}{\beta_{3t}\tau} - \frac{\beta_{2t}}{\beta_{3t}} e^{-\beta_{3t}\tau}\end{aligned}$$



# Plan de présentation

1

Introduction

2

**Courbes paramétriques**

- Survol de la méthode et utilisation
- Courbe de Nelson-Siegel
- **Analyse empirique**
- Conclusion

3

Analyse de composantes principales

- Survol de la méthode et utilisation
- Analyse empirique
- Conclusion

4

Méthode des moments

- Description de la méthode
- Modèles de taux d'intérêt court-terme
- Détails de la méthode
- Données utilisées
- Applications

5

Méthode du maximum de vraisemblance

- Application aux modèles
- Estimation

# Données

- Taux composite des bons du trésor américain

# Données

- Taux composite des bons du trésor américain
- Entre le 3 janvier 1990 et le 15 février 2012

# Données

- Taux composite des bons du trésor américain
- Entre le 3 janvier 1990 et le 15 février 2012
- Intervalle de 30 jours

# Données

- Taux composite des bons du trésor américain
- Entre le 3 janvier 1990 et le 15 février 2012
- Intervalle de 30 jours
- 192 observations

# Méthode

- Méthode des moindres carrés ordinaires

# Méthode

- Méthode des moindres carrés ordinaires
- On note  $O_{\tau}^{(t)}$  le taux instantané observé pour la duration  $\tau$  au temps  $t$

# Méthode

- Méthode des moindres carrés ordinaires
- On note  $O_{\tau}^{(t)}$  le taux instantané observé pour la duration  $\tau$  au temps  $t$
- Équation d'estimation

$$\sum_{\tau} (O_{\tau}^{(t)} - r(\tau, t))^2$$



# Méthode

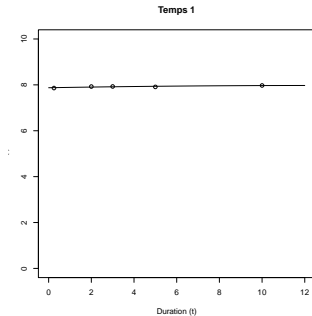
- Méthode des moindres carrés ordinaires
- On note  $O_{\tau}^{(t)}$  le taux instantané observé pour la duration  $\tau$  au temps  $t$
- Équation d'estimation

$$\sum_{\tau} (O_{\tau}^{(t)} - r(\tau, t))^2$$

- On doit minimiser la valeur de cette expression pour obtenir les meilleurs estimateurs de  $\beta = [\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3]$ .

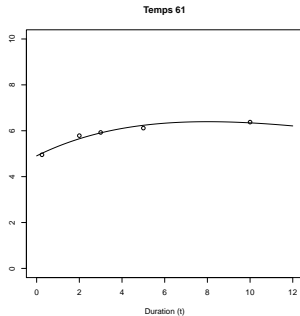
# Graphiques

Temps  $t = 1$



# Graphiques

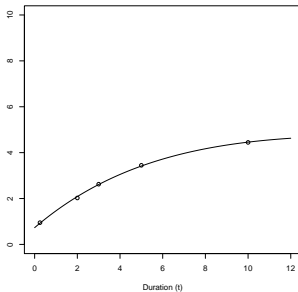
Temps  $t = 61$



# Graphiques

Temps  $t = 121$

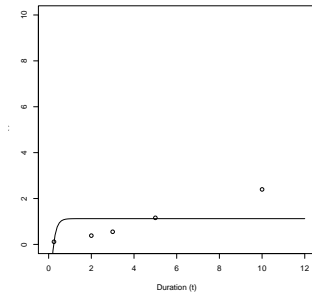
Temps 121



# Graphiques

Temps  $t = 181$

Temps 181



# En résumé

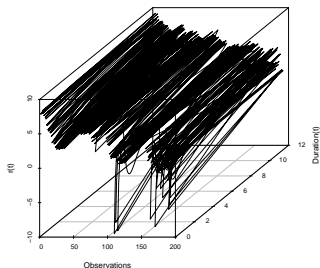
- S'adapte bien aux formes concaves

# En résumé

- S'adapte bien aux formes concaves
- Mais non aux formes convexes ou avec un point d'inflexion

# En résumé

Pour les 192 observations,  
de gauche à droite





# Plan de présentation

1

Introduction

2

**Courbes paramétriques**

- Survol de la méthode et utilisation
- Courbe de Nelson-Siegel
- Analyse empirique
- **Conclusion**

3

Analyse de composantes principales

- Survol de la méthode et utilisation
- Analyse empirique
- Conclusion

4

Méthode des moments

- Description de la méthode
- Modèles de taux d'intérêt court-terme
- Détails de la méthode
- Données utilisées
- Applications

5

Méthode du maximum de vraisemblance

- Application aux modèles
- Estimation

# Conclusion

- utiles pour faire de l'interpolation

# Conclusion

- utiles pour faire de l'interpolation
- pas des modèles robustes

# Conclusion

- utiles pour faire de l'interpolation
- pas des modèles robustes
- Résultats erronées si les données n'ont pas certaines caractéristiques de régularité

# Conclusion

- utiles pour faire de l'interpolation
- pas des modèles robustes
- Résultats erronées si les données n'ont pas certaines caractéristiques de régularité
- Courbes de Nelson-Siegel : faciles à estimer

# Conclusion

- utiles pour faire de l'interpolation
- pas des modèles robustes
- Résultats erronés si les données n'ont pas certaines caractéristiques de régularité
- Courbes de Nelson-Siegel : faciles à estimer
- Courbes de Svensson plus flexibles : plusieurs paramètres supplémentaires

# Plan de présentation

- 1 Introduction
- 2 Courbes paramétriques
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Courbe de Nelson-Siegel
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 3 Analyse de composantes principales
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 4 Méthode des moments
  - Description de la méthode
  - Modèles de taux d'intérêt court-terme
  - Détails de la méthode
  - Données utilisées
  - Applications
- 5 Méthode du maximum de vraisemblance
  - Application aux modèles
  - Estimation

# But

- Identifier différents facteurs qui peuvent causer la volatilité à l'intérieur d'une série chronologique multivariée



# But

- Identifier différents facteurs qui peuvent causer la volatilité à l'intérieur d'une série chronologique multivariée
- Modèle à facteurs multiples : analyse est particulièrement complexe

# But

- Identifier différents facteurs qui peuvent causer la volatilité à l'intérieur d'une série chronologique multivariée
- Modèle à facteurs multiples : analyse est particulièrement complexe
- Survol rapide

# Notation

- Observations sous la forme  $r_{t_i}(\tau_j)$

# Notation

- Observations sous la forme  $r_{t_i}(\tau_j)$
- $t_i$  est le temps, de 1 à  $n + 1$

# Notation

- Observations sous la forme  $r_{t_i}(\tau_j)$
- $t_i$  est le temps, de 1 à  $n + 1$
- $j$  est le nombre d'observations en coupe transversale

# Differentiation

- Pour observer la volatilité : données différenciées :

$$d_{i,j} = r_{t_{i+1}}(\tau_j) - r_{t_i}(\tau_j)$$

# Matrice de variance-covariance $\Sigma$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{var}(d_1) & \text{cov}(d_1, d_2) & \cdots & \text{cov}(d_1, d_k) \\ \text{cov}(d_2, d_1) & \text{var}(d_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(d_k, d_1) & \cdots & \cdots & \text{var}(d_k) \end{bmatrix}$$

# Valeurs et vecteurs propres

- Matrice  $\mathbf{P}$  telle que sa transposée est également son inverse



# Valeurs et vecteurs propres

- Matrice  $\mathbf{P}$  telle que sa transposée est également son inverse
- La matrice de vecteurs propres de  $\Sigma$

# Valeurs et vecteurs propres

- Matrice  $\mathbf{P}$  telle que sa transposée est également son inverse
- La matrice de vecteurs propres de  $\Sigma$
- Vecteur  $\lambda$  contenant les valeurs propres

# Composantes et variance expliquée

- $\mathbf{P}$  : matrice de composantes principales

# Composantes et variance expliquée

- $\mathbf{P}$  : matrice de composantes principales
- $\lambda$  : vecteur des variances expliquées par chacune des composantes principales, en ordre décroissant.

- Analyse visuelle

- Analyse visuelle
- taux d'intérêt : 3 premières composantes

- Analyse visuelle
- taux d'intérêt : 3 premières composantes
- 2 méthodes : matrice de covariance et matrice de corrélations

# Plan de présentation

- 1 Introduction
- 2 Courbes paramétriques
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Courbe de Nelson-Siegel
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 3 **Analyse de composantes principales**
  - Survol de la méthode et utilisation
  - **Analyse empirique**
  - Conclusion
- 4 Méthode des moments
  - Description de la méthode
  - Modèles de taux d'intérêt court-terme
  - Détails de la méthode
  - Données utilisées
  - Applications
- 5 Méthode du maximum de vraisemblance
  - Application aux modèles
  - Estimation



# Données

- Taux composite des bons du trésor américain entre le 3 janvier 1990 et le 15 février 2012

# Données

- Taux composite des bons du trésor américain entre le 3 janvier 1990 et le 15 février 2012
- Intervalle quotidien

# Données

- Taux composite des bons du trésor américain entre le 3 janvier 1990 et le 15 février 2012
- Intervalle quotidien
- Obligations de 90 jours, 2 ans, 3 ans, 5 ans, 10 ans et 30 ans

# Données

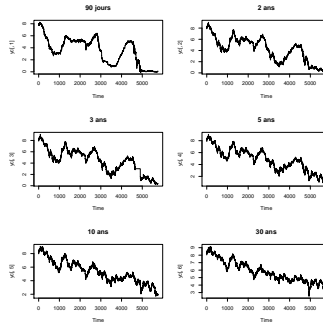


Figure: Séries observées

## Méthode covariance : Composantes principales

Vecteurs propres **P**

	1	2	3	4	5	6
1	-0.1576	0.9315	-0.2613	-0.1936	-0.0424	0.0027
2	-0.4388	0.1746	0.3688	0.5881	0.5189	0.1611
3	-0.4304	-0.0499	0.5864	-0.6842	0.0141	-0.0083
4	-0.4993	-0.0455	-0.0019	0.3105	-0.5847	-0.5570
5	-0.4584	-0.1913	-0.3438	-0.0074	-0.2998	0.7383
6	-0.3713	-0.2465	-0.5777	-0.2282	0.5450	-0.3443

## Méthode covariance : Variance expliquée

Valeurs propres  $\lambda$

	1	2	3	4	5	6
1	0.0170	0.0025	0.0012	0.0006	0.0002	0.0001

Proportions

	1	2	3	4	5	6
1	0.7846	0.1167	0.0576	0.0278	0.0095	0.0037

## Méthode corrélation : Composantes principales

Vecteurs propres **P**

	1	2	3	4	5	6
1	-0.1957	0.9453	-0.2133	0.1457	-0.0362	0.0017
2	-0.4367	0.1117	0.4137	-0.5828	0.5041	0.1785
3	-0.4226	-0.0719	0.5529	0.7141	0.0234	-0.0047
4	-0.4611	-0.0585	0.0472	-0.3013	-0.5541	-0.6196
5	-0.4526	-0.1715	-0.2958	-0.0381	-0.4083	0.7142
6	-0.4182	-0.2364	-0.6229	0.1921	0.5199	-0.2723

## Méthode corrélation : Variance expliquée

Valeurs propres  $\lambda$

	1	2	3	4	5	6
1	4.5010	0.9038	0.3615	0.1584	0.0548	0.0205

Proportions

	1	2	3	4	5	6
1	0.7502	0.1506	0.0602	0.0264	0.0091	0.0034



# Comparaison des deux approches

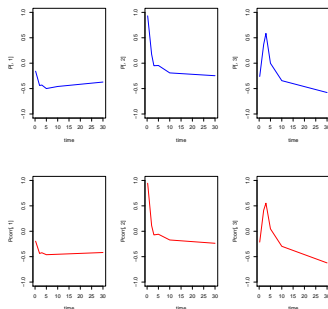


Figure: Composantes pour les deux approches

# Volatilité expliquée par composante (score)

$$Score(t) = r(t) \times \mathbf{P}$$

# Volatilité expliquée par composante (score)

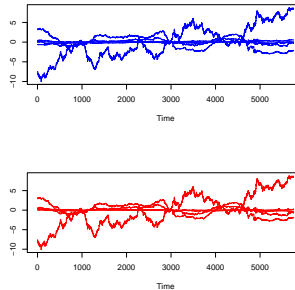


Figure: Score

# Plan de présentation

- 1 Introduction
- 2 Courbes paramétriques
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Courbe de Nelson-Siegel
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 3 Analyse de composantes principales
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 4 Méthode des moments
  - Description de la méthode
  - Modèles de taux d'intérêt court-terme
  - Détails de la méthode
  - Données utilisées
  - Applications
- 5 Méthode du maximum de vraisemblance
  - Application aux modèles
  - Estimation

- Parallel shift : changements qui affectent l'ensemble de la courbe

- Parallel shift : changements qui affectent l'ensemble de la courbe
- Tilt : variations à court terme et influence inverse à long terme

- Parallel shift : changements qui affectent l'ensemble de la courbe
- Tilt : variations à court terme et influence inverse à long terme
- Flex : forme plus ou moins concave

# Plan de présentation

- 1 Introduction
- 2 Courbes paramétriques
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Courbe de Nelson-Siegel
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 3 Analyse de composantes principales
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 4 **Méthode des moments**
  - **Description de la méthode**
  - Modèles de taux d'intérêt court-terme
  - Détails de la méthode
  - Données utilisées
  - Applications
- 5 Méthode du maximum de vraisemblance
  - Application aux modèles
  - Estimation



# Définition

- technique d'estimation paramétrique

# Définition

- technique d'estimation paramétrique
- fonctions d'estimation basée sur moments empiriques

# Définition

- technique d'estimation paramétrique
- fonctions d'estimation basée sur moments empiriques
- condition d'orthogonalité

# Déf. formelle

- vecteur de  $k$  paramètres  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$

# Déf. formelle

- vecteur de  $k$  paramètres  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$
- $f = (f_1, \dots, f_m)$ , un vecteur de  $m$ ,  $m \geq k$  fonctions  $f_i(r_t|\theta)$  de l'échantillon  $r_t$

# Déf. formelle

- vecteur de  $k$  paramètres  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$
- $f = (f_1, \dots, f_m)$ , un vecteur de  $m$ ,  $m \geq k$  fonctions  $f_i(r_t|\theta)$  de l'échantillon  $r_t$
- $E[f_i(r_t|\theta)] = 0$

- $\hat{\theta} = \operatorname{argmin}(\theta, f' \times W \times f)$

- $\hat{\theta} = \operatorname{argmin}(\theta, f' \times W \times f)$
- Matrice de pondération définie positive  $W$



- $\hat{\theta} = \operatorname{argmin}(\theta, f' \times W \times f)$
- Matrice de pondération définie positive  $W$
- MCO :  $W$  est la matrice identité

- $\hat{\theta} = \operatorname{argmin}(\theta, f' \times W \times f)$
- Matrice de pondération définie positive  $W$
- MCO :  $W$  est la matrice identité
- MCG : Information de Fisher empirique

- $\hat{\theta} = \operatorname{argmin}(\theta, f' \times W \times f)$
- Matrice de pondération définie positive  $W$
- MCO :  $W$  est la matrice identité
- MCG : Information de Fisher empirique
- GMM : l'estimateur robuste de Newey and West

# Plan de présentation

- 1 Introduction
- 2 Courbes paramétriques
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Courbe de Nelson-Siegel
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 3 Analyse de composantes principales
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 4 **Méthode des moments**
  - Description de la méthode
  - **Modèles de taux d'intérêt court-terme**
  - Détails de la méthode
  - Données utilisées
  - Applications
- 5 Méthode du maximum de vraisemblance
  - Application aux modèles
  - Estimation

# Modèle de Vasicek

- EDS

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

# Modèle de Vasicek

- EDS

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

- Solution

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s.$$

# Modèle de Vasicek

- EDS

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

- Solution

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s.$$

- Moyenne et variance

$$E[r_t] = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})$$

$$\text{Var}[r_t] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[r_t] = b$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[r_t] = \frac{\sigma^2}{2a}$$

# Modèle de Cox, Ingersoll et Ross

- EDS

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t \quad (2)$$



# Modèle de Cox, Ingersoll et Ross

- EDS

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t \quad (2)$$

- Moyenne et variance

$$\begin{aligned} E[r_t|r_0] &= r_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) \\ \text{Var}[r_t|r_0] &= r_0 \frac{\sigma^2}{\theta} (e^{-\theta t} - e^{-2\theta t}) + \frac{\mu\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-\theta t})^2 \end{aligned}$$

# Modèle de Chan, Karolyi, Longstaff et Sanders

- EDS

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma r_t^\gamma dW_t \quad (3)$$

# Plan de présentation

- 1 Introduction
- 2 Courbes paramétriques
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Courbe de Nelson-Siegel
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 3 Analyse de composantes principales
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 4 **Méthode des moments**
  - Description de la méthode
  - Modèles de taux d'intérêt court-terme
  - **Détails de la méthode**
  - Données utilisées
  - Applications
- 5 Méthode du maximum de vraisemblance
  - Application aux modèles
  - Estimation

# Discrétisation

- Méthode d'Euler

# Discrétisation

- Méthode d'Euler
- Pour le modèle CKLS, on obtient

$$r_{t+1} = a + br_t + \sigma r_t^\gamma u_{t-1} \quad (4)$$

# Conditions

- On fixe

$$\begin{aligned}\epsilon_{t+1} &= r_{t+1} - (a + br_t) \\ &= \sigma r_t^\gamma u_{t-1}\end{aligned}$$

# Conditions

- On fixe

$$\begin{aligned}\epsilon_{t+1} &= r_{t+1} - (a + br_t) \\ &= \sigma r_t^\gamma u_{t-1}\end{aligned}$$

- $\epsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t)$

# Conditions

- On fixe

$$\begin{aligned}\epsilon_{t+1} &= r_{t+1} - (a + br_t) \\ &= \sigma r_t^\gamma u_{t-1}\end{aligned}$$

- $\epsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t)$
- $\epsilon_{t+1}$  n'est pas corrélé avec  $r_t$



## Conditions de moments utilisées

- Moyenne et variance

$$E[\epsilon_{t+1}] = 0 \quad (5)$$

$$E[\epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t] = 0 \quad (6)$$

## Conditions de moments utilisées

- Moyenne et variance

$$E[\epsilon_{t+1}] = 0 \quad (5)$$

$$E[\epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t] = 0 \quad (6)$$

- Corrélations

$$E[\epsilon_{t+1} r_t] = 0 \quad (7)$$

$$E[(\epsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t) r_t] = 0 \quad (8)$$

## Moments empiriques

$$f_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{t+1} - a - br_t) \quad (9)$$

$$f_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{t+1} - a - br_t)^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t \quad (10)$$

$$f_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_{t+1} - a - br_t) r_t \quad (11)$$

$$f_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((r_{t+1} - a - br_t) - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \Delta t) r_t \quad (12)$$

# Équation d'estimation

$$J(a, b, \sigma, \gamma) = f'f = \sum_{i=1}^4 f_i^2 \quad (13)$$

On fait ici une hypothèse forte d'absence de corrélation et d'homoscédasticité des erreurs

# Moindres carrés pondérés

$$J(a, b, \sigma, \gamma) = f' W f \quad (14)$$

## Matrice $W$ optimale

$$\hat{\Omega}_0 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{f}_t^2 \quad (15)$$

Un meilleur choix est l'estimateur de Newey-West

## Estimateur de Newey-West

L'estimateur de Newey-West prend la forme

$$\hat{S}_T = \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{j}{m-1}\right) [\hat{\Omega}_j + \hat{\Omega}_j'] \quad (16)$$

$$\hat{\Omega}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T \hat{f}_t \hat{f}_{t-j}' \quad (17)$$

- $m$  est le nombre de pas de temps de décalage utilisés

## Estimateur de Newey-West

L'estimateur de Newey-West prend la forme

$$\hat{S}_T = \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{j}{m-1}\right) [\hat{\Omega}_j + \hat{\Omega}_j'] \quad (16)$$

$$\hat{\Omega}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T \hat{f}_t \hat{f}_{t-j}' \quad (17)$$

- $m$  est le nombre de pas de temps de décalage utilisés
- $\hat{\Omega}_j$  est une matrice d'autocovariance entre la série de données et la même série mais décalée de  $j$  pas de temps



## Estimateur de Newey-West

L'estimateur de Newey-West prend la forme

$$\hat{S}_T = \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{j}{m-1}\right) [\hat{\Omega}_j + \hat{\Omega}_j'] \quad (16)$$

$$\hat{\Omega}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T \hat{f}_t \hat{f}_{t-j}' \quad (17)$$

- $m$  est le nombre de pas de temps de décalage utilisés
- $\hat{\Omega}_j$  est une matrice d'autocovariance entre la série de données et la même série mais décalée de  $j$  pas de temps
- Le rôle du coefficient  $\left(1 - \frac{j}{m-1}\right)$  est de s'assurer que la matrice est semi-définie positive

# Jacobien des moments

Pour former les statistiques de diagnostic. Pour CKLS :

$$\frac{df}{d\theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial b} & \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} & \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} & \frac{\partial f_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a} & \frac{\partial f_3}{\partial b} & \frac{\partial f_3}{\partial \sigma} & \frac{\partial f_3}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial f_4}{\partial a} & \frac{\partial f_4}{\partial b} & \frac{\partial f_4}{\partial \sigma} & \frac{\partial f_4}{\partial \gamma} \end{bmatrix}$$

## Statistique de Student (t)

On utilise ici la méthode delta pour construire la matrice de variance-covariance des paramètres

$$V = \frac{df}{d\hat{\theta}} W \frac{df'}{d\hat{\theta}} \quad (18)$$

On prend la diagonale (variances) pour calculer les statistiques de Student

$$t = \frac{\theta_i}{\sqrt{V_{ii}}}$$

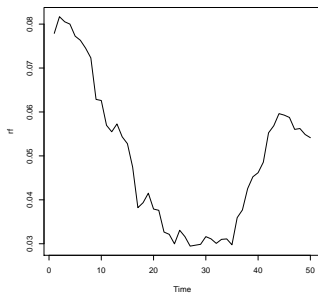
# Plan de présentation

- 1 Introduction
- 2 Courbes paramétriques
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Courbe de Nelson-Siegel
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 3 Analyse de composantes principales
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 4 **Méthode des moments**
  - Description de la méthode
  - Modèles de taux d'intérêt court-terme
  - Détails de la méthode
  - **Données utilisées**
  - Applications
- 5 Méthode du maximum de vraisemblance
  - Application aux modèles
  - Estimation

Les données utilisées sont des données mensuelles entre les dates suivantes

[1] "1990-01-03" "1995-10-18"

La série se décrit visuellement comme suit :



Les statistiques descriptives de base de la série sont :

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
0.02946	0.03276	0.04800	0.04930	0.05838	0.08169

# Plan de présentation

- 1 Introduction
- 2 Courbes paramétriques
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Courbe de Nelson-Siegel
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 3 Analyse de composantes principales
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 4 **Méthode des moments**
  - Description de la méthode
  - Modèles de taux d'intérêt court-terme
  - Détails de la méthode
  - Données utilisées
  - **Applications**
- 5 Méthode du maximum de vraisemblance
  - Application aux modèles
  - Estimation



# Modèle CKLS estimé avec GMM

	Est. param.	T-Stat	p-value
a	0.02320	22.30001	0.00000
b	-0.58973	14.27554	0.00000
sigma	0.03416	72953440.38807	0.00000
gamma	0.96593	372870417.22069	0.00000

Table: Modèle CKLS estimé avec GMM

## Modèle Vasicek estimé avec GMM

	Est. param.	T-Stat	p-value
a	0.02320	21.94401	0.00000
b	-0.58973	1.59672	0.05859
sigma	0.00011	10.98051	0.00000

Table: Modèle Vasicek estimé avec GMM

## Modèle CIR estimé avec GMM

	Est. param.	T-Stat	p-value
a	0.02320	22.28222	0.00000
b	-0.58973	1.62643	0.05535
sigma	0.00227	2.39356	0.01041

Table: Modèle CIR estimé avec GMM

## Matrice de Var-Cov des par. pour modèle CKLS avec GMM

	a	b	sigma	gamma
a	0.00010	-0.00138	0.00007	-0.00001
b	-0.00138	0.02636	-0.00267	0.00052
sigma	0.00007	-0.00267	0.00402	-0.00079
gamma	-0.00001	0.00052	-0.00079	0.00015

**Table:** Matrice de Var-Cov des par. pour modèle CKLS avec GMM

# Matrice de Var-Cov des par. pour modèle Vasicek avec GMM

	a	b	sigma
a	0.00010	-0.00138	0.00000
b	-0.00138	0.02636	-0.00001
sigma	0.00000	-0.00001	0.00000

Table: Matrice de Var-Cov des par. pour modèle Vasicek avec GMM

# Matrice de Var-Cov des par. pour modèle CIR avec GMM

	a	b	sigma
a	0.00010	-0.00138	0.00000
b	-0.00138	0.02636	-0.00018
sigma	0.00000	-0.00018	0.00001

**Table:** Matrice de Var-Cov des par. pour modèle CIR avec GMM

# Conclusion

- Facile à implémenter

# Conclusion

- Facile à implémenter
- difficultés au niveau du calcul de la matrice de variance-covariance



# Conclusion

- Facile à implémenter
- difficultés au niveau du calcul de la matrice de variance-covariance
- Donne des estimations cohérentes pour la moyenne à long terme, mais de grosses différences pour la variance

# Objectif

- Paramètres qui maximisent la prob. que l'échantillon obtenu provienne de la distribution.

# Objectif

- Paramètres qui maximisent la prob. que l'échantillon obtenu provienne de la distribution.
- Fonction à maximiser : logarithme de la fonction de vraisemblance  $\ln L(\theta)$

# Plan de présentation

- 1 Introduction
- 2 Courbes paramétriques
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Courbe de Nelson-Siegel
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 3 Analyse de composantes principales
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 4 Méthode des moments
  - Description de la méthode
  - Modèles de taux d'intérêt court-terme
  - Détails de la méthode
  - Données utilisées
  - Applications
- 5 Méthode du maximum de vraisemblance
  - Application aux modèles
  - Estimation

## Application au modèle de Vasicek

On obtient de l'EDS :

$$r_{t_2}|r_{t_1} \sim N\left(\mu + (r_{t_1} - \mu)e^{-\alpha\Delta t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{2\alpha\Delta t})\right) \quad (19)$$

On veut donc minimiser en  $\theta$ ,  $f(\cdot)$  est la densité de  $r_{t_2}$  :

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \ln f(\cdot|r_{t_1}, \theta) \quad (20)$$

## Application au modèle CIR

On obtient de l'EDS :

$$p(t_2, r_{t_2}; t_1, r_{t_1} | \theta) = c e^{-u-\nu} \left(\frac{\nu}{u}\right)^{\frac{q}{2}} I_q(2\sqrt{u\nu}) \quad (21)$$

$I_q()$  est la fonction de Bessel modifiée de type 1

$$I_q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(q\tau - x \sin \tau)} d\tau.$$

## Application au modèle CIR

On retrouve les constantes suivantes :

$$\begin{aligned}c &= \frac{2\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-\alpha\Delta t})} \\u &= cr_{t_1}e^{-\alpha\Delta t} \\\nu &= cr_{t_2} \\q &= \frac{2\alpha\mu}{\sigma} - 1\end{aligned}$$

## Forme alternative

Au lieu de la forme Bessel modifiée :

$$r_{t_2} | r_{t_1} \sim \chi^2(2cr_{t_2}; 2q + 2, 2u) \quad (22)$$

Minimiser (23) en  $\theta$ , où  $f(\cdot)$  est une  $\chi^2$  non centrée de  $r_{t_2}$ .

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \ln f(\cdot | r_{t_1}, \theta) \quad (23)$$



La solution est difficile à obtenir numériquement, alors je ne l'ai pas implantée. Cette estimation se fait plus souvent avec des méthodes de filtration (Kalman).

On peut aussi utiliser la quasi-vraisemblance basée sur la loi normale.

# Application au modèle CIR avec approximation normale

$$E[r_{t_2}|r_{t_1}] = r_{t_1}e^{-\alpha\Delta t} + \mu(1 - e^{-\alpha\Delta t})$$

$$V[r_{t_2}|r_{t_1}] = r_{t_1} \frac{\sigma^2}{\alpha} (e^{-\alpha\Delta t} - e^{-2\alpha\Delta t}) + \mu \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha\Delta t})^2$$

# Plan de présentation

- 1 Introduction
- 2 Courbes paramétriques
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Courbe de Nelson-Siegel
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 3 Analyse de composantes principales
  - Survol de la méthode et utilisation
  - Analyse empirique
  - Conclusion
- 4 Méthode des moments
  - Description de la méthode
  - Modèles de taux d'intérêt court-terme
  - Détails de la méthode
  - Données utilisées
  - Applications
- 5 Méthode du maximum de vraisemblance
  - Application aux modèles
  - **Estimation**

# Estiamtion

Avec les mêmes données que GMM : Paramètres estimés avec les deux méthodes :

	Param	Vasicek	CIR.QL
1	alpha	0.604539835935924	0.642262538740856
2	mu	0.0393379847421409	0.0398958894018834
3	sigma	0.000117483898235261	0.00250688987001702

**Table:** Paramètres estimés par maximum de vraisemblance pour 2 modèles

# Conclusion

Test de ratio de vraisemblance, le modèle CIR ajusté avec l'approximation normale est meilleur que le modèle de Vasicek, avec un niveau de  $6.694339e-06$ .



Cette création est mise à disposition selon le contrat  
Paternité-Partage à l'identique 2.5 Canada de Creative Commons  
disponible à l'adresse

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/ca/deed.fr>

En vertu de ce contrat, vous êtes libre de :

- **partager** — reproduire, distribuer et communiquer l'œuvre ;
- **remixer** — adapter l'œuvre ;
- utiliser cette œuvre à des fins commerciales.

Selon les conditions suivantes :



**Attribution** — Vous devez attribuer l'œuvre de la manière indiquée par l'auteur de l'œuvre ou le titulaire des droits (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'œuvre).



**Partage à l'identique** — Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette œuvre, vous n'avez le droit de distribuer