



Rapport de recherche

Travail présenté à Claude-Guy Quimper
IFT-7020 Optimisation combinatoire
Session d'hiver 2018

Réalisé par
François Bérubé et François Pelletier ;
900226407, 908144032

Dernière version produite le 8 avril 2018 à 01:00

Table des matières

1	Modélisation	3
1.1	Paramètres	3
1.1.1	Horaire de travail et demande	3
1.1.2	Employés	3
1.2	Variables	3
1.3	Énumération des horaires valides	4
1.3.1	Paramètres	4
1.3.2	Variables	4
1.3.3	Contraintes	4
1.3.4	Ajout des périodes	5
1.4	Contraintes	5
1.5	Fonction objectif	6
	Bibliographie	7

1 Modélisation

1.1 Paramètres

1.1.1 Horaire de travail et demande

Nous considérons une planification d'horaires de travail d'une durée de J jours. Chaque journée est composée de P périodes de travail, d'une durée de $\frac{24}{P}$ heures chacune. La demande de travail pour la période p de la journée j est définie par $d_{p,j}$. La demande totale pour la durée de l'horaire de travail est définie par l'équation (1).

$$D^{TOT} = \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^J d_{p,j} \quad (1)$$

1.1.2 Employés

Notre modèle considère deux types A d'employés : les employés à temps plein et les employés à temps partiel (2).

$$A \in FT, PT \quad (2)$$

Ils travaillent des périodes consécutives d'une durée i^A heures. L'intervalle de travail des employés à temps plein doit cependant débuter à la première, troisième ou cinquième période. On définit aussi un nombre d'heures de repos minimal r_{min}^A entre les périodes travaillées. Les employés à temps plein travaillent h_{reg}^{FT} heures par période de deux semaines et les employés à temps partiel travaillent entre h_{min}^{PT} et h_{max}^{PT} heures durant cette même période. Les employés ne travaillent pas plus que j_{max}^A journées consécutives. Le nombre d'employés E de chaque type est variable et sera déterminé par les ratios (3) :

$$E^A = \frac{D^{TOT}}{h_{reg}^A}, \quad \forall A \quad (3)$$

Les employés ont respectivement un salaire horaire de S^A et encourent un frais fixe de F^A . Afin de représenter une plus faible productivité des employés à temps partiel, on pourra majorer artificiellement leur salaire horaire.

1.2 Variables

On représente les horaires de travail par deux tableaux de variables booliennes \mathbf{X}^{FT} et \mathbf{X}^{PT} (4).

$$\begin{aligned} X^A &= (x_{e,j,p}^A) \in \mathbb{N}^{E^A \times J \times P} & \forall A \\ \text{dom}(x_{e,j,p}^A) &= \{0, 1\} & \forall 1 \leq e \leq E^A, 1 \leq j \leq J, 1 \leq p \leq P \end{aligned} \quad (4)$$

1.3 Énumération des horaires valides

Afin de réduire la taille du problème, la liste des horaires quotidiens valides pour un employé est générée, pour chaque type d'employés. Il s'agit de deux sous-problèmes de satisfaction pouvant aussi être résolus avec le solveur Choco [1]. L'énumération de toutes les solutions obtenues sera ensuite utilisée pour générer l'ensemble des tuples d'une contrainte TABLEAU.

1.3.1 Paramètres

1.3.2 Variables

On définit $\vec{H}^A \in \mathbb{N}^J$, un vecteur de variables booléennes h_j formant un horaire d'une durée de J journées pour un employé de type $A \in \{FT, PT\}$.

1.3.3 Contraintes

L'horaire doit respecter le nombre de périodes travaillées sur la durée totale de l'horaire.

$$\frac{h_{min}^A}{i^A} \leq \sum_{j=1}^J h_j \leq \frac{h_{max}^A}{i^A} \quad (5)$$

L'horaire de l'employé à temps partiel doit contenir un même nombre de jours dans les deux sous-périodes $j \in [p1_{min}, p1_{max}] = [1, 5]$ et $j \in [p2_{min}, p2_{max}] = [8, 12]$ du lundi au vendredi.

$$\sum_{j=p1_{min}}^{p1_{max}} h_j = \sum_{j=p2_{min}}^{p2_{max}} h_j \quad (6)$$

L'horaire doit inclure le travail durant une fin de semaine sur deux.

$$h_6 = h_7 \wedge h_{13} = h_{14} \wedge h_6 \neq h_{13} \quad (7)$$

L'horaire doit respecter le nombre maximum de jours consécutifs travaillés autorisés. On utilise une contrainte REGULAR «réifiée» pour représenter le non-respect de cette contrainte, c'est-à-dire lorsque qu'on retrouve une séquence de jours consécutifs dont la longueur est supérieure à j_{max}^A . L'automate fini pour cette contrainte lorsque $j_{max}^A = 4$ est représenté à la figure 1. L'expression régulière représentant cet automate prend la forme $[01]^*1\{5,\}[01]^*$.

On obtient, pour chaque type de travailleur, une liste de vecteurs à laquelle on ajoute le vecteur nul, représentant la situation où l'employé est exclus de l'horaire.

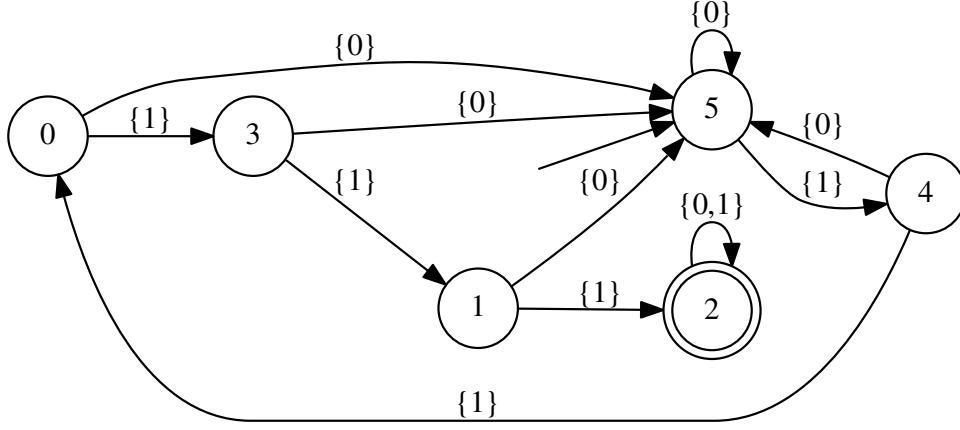


FIGURE 1 – Automate fini d'un horaire où $j_{max}^A \leq 4$ n'est pas respecté

1.3.4 Ajout des périodes

On considère la matrice des horaires quinzomadaires valides (8) et la matrice des n_{hq}^A horaires quotidiens valides (9), on obtient un tableau d'horaires par périodes travaillées valides $\mathbf{V}^A \in \mathbb{N}^3$ par le produit tensoriel (10)

$$\mathbf{H}^A = \left(\vec{H}^A \right) \quad (8)$$

$$\mathbf{Q}^A = \begin{bmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{P,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1,n_{hq}^A} & \cdots & q_{P,n_{hq}^A} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{V}^A = \mathbf{H}^A \otimes \mathbf{Q}^A \quad (10)$$

1.4 Contraintes

Chaque horaire d'employé doit d'abord correspondre à un horaire valide tel qu'établi à la section 1.3. Il doit donc satisfaire une contrainte TABLEAU (11).

$$\mathcal{C}_1 : \text{TABLEAU} \left(\mathbf{V}^A, \begin{bmatrix} x_{e,1,1} & \cdots & x_{e,1,J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{e,P,1} & \cdots & x_{e,P,J} \end{bmatrix} \right) \quad \forall e \quad (11)$$

La planification doit aussi satisfaire la demande en employés, en utilisant une contrainte SUM.

$$\mathcal{C}_2 : \sum_A \sum_{e=1}^{E^A} x_{e,p,j} = d_{p,j} \quad \forall 1 \leq p \leq P, 1 \leq j \leq J \quad (12)$$

1.5 Fonction objectif

Bibliographie

- [1] Charles Prud'homme, Jean-Guillaume Fages, and Xavier Lorca. *Choco Documentation*. TASC - LS2N CNRS UMR 6241, COSLING S.A.S., 2017. URL <http://www.choco-solver.org>.