Rapport de recherche

Travail présenté à Claude-Guy Quimper
IFT-7020 Optimisation combinatoire
Session d'hiver 2018

Réalisé par
François Bérubé et François Pelletier ;
900226407, 908144032

Dernière version produite le 8 avril 2018 à 16:32

Table des matières

1 Modélisation

1.1 Paramètres

1.1.1 Horaire de travail et demande

Nous considérons une planification d'horaires de travail d'une durée de J jours. Chaque journée est composée de P périodes de travail, d'une durée de $\frac{24}{P}$ heures chacunes. La demande de travail pour la période p de la journée j est définie par $d_{p,j}$. La demande totale pour la durée de l'horaire de travail est définie par l'équation (1).

$$D^{TOT} = \sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{J} d_{p,j} \tag{1}$$

1.1.2 Employés

Notre modèle considère deux types A d'employés : les employés à temps plein et les employés à temps partiel (2).

$$A \in FT, PT \tag{2}$$

Ils travaillent des périodes consécutives d'une durée i_A heures. L'intervalle de travail des employés à temps plein doit cependant débuter à la première, troisième ou cinquième période. On définit aussi un nombre d'heures de repos minimal $r_{min,A}$ entre les périodes travaillées. Les employés à temps plein travaillent h_{reg}^{FT} heures par période de deux semaines et les employés à temps partiel travaillent entre h_{min}^{PT} et h_{max}^{PT} heures durant cette même période. Les employés ne travaillent pas plus que $j_{max,A}$ journées consécutives. Le nombre d'employés E de chaque type est variable et sera déterminé par les ratios (3) :

$$E_A = \frac{D^{TOT}}{h_{reg,A}}, \qquad \forall A \tag{3}$$

Les employés ont respectivement un salaire par période de s_A et encourent un frais fixe de f_A pour la durée de l'horaire. Afin de représenter une plus faible productivité des employés à temps partiel, on pourra majorer artificiellement leur salaire horaire.

1.2 Variables

On représente les horaires de travail par deux tableaux de variables booliennes $\mathbf{X}_{FT}$ et $\mathbf{X}_{PT}$ (4).

$$\begin{aligned} X_A &= (x_{e,j,p,A}) \in \mathbb{N}^{E_A \times J \times P} && \forall A \\ dom(x_{e,j,p,A}) &= \{0, 1\} && \forall 1 \leq e \leq E_A, 1 \leq j \leq J, 1 \leq p \leq P \end{aligned} \tag{4}$$

1.3 Énumération des horaires valides

Afin de réduire la taille du problème, la liste des horaires quotidiens valides pour un employé est générée, pour chaque type d'employés. Il s'agit de deux sous-problèmes de satisfaction pouvant aussi être résolus avec le solveur Choco [2]. L'énumération de toutes les solutions obtenues sera ensuite utilisée pour générer l'ensemble des tuples d'une contrainte TABLEAU.

1.3.1 Paramètres

1.3.2 Variables

On définit $\vec{H}_A \in \mathbb{N}^J$, un vecteur de variables booléennes h_j formant un horaire d'une durée de J journées pour un employé de type $A \in \{FT, PT\}$.

1.3.3 Contraintes

L'horaire doit respecter le nombre de périodes travaillées sur la durée totale de l'horaire (5).

$$\frac{h_{min,A}}{i_A} \leq \sum_{j=1}^{J} h_j \leq \frac{h_{max,A}}{i_A} \tag{5}$$

L'horaire de l'employé à temps partiel doit contenir un même nombre de jours dans les deux sous-périodes $j \in [p1_{min}, p1_{max}] = [1, 5]$ et $j \in [p2_{min}, p2_{max}] = [8, 12]$ du lundi au vendredi (6).

$$\sum_{j=p1_{min}}^{p1_{max}} h_j = \sum_{j=p2_{min}}^{p2_{max}} h_j \tag{6}$$

L'horaire doit inclure le travail durant une fin de semaine sur deux (7).

$$h_6 = h_7 \wedge h_{13} = h_{14} \wedge h_6 \neq h_{13} \tag{7}$$

L'horaire doit respecter le nombre maximum de jours consécutifs travaillés autorisés. On utilise une contrainte REGULAR «réifiée »pour représenter le non-respect de cette contrainte, c'est-à-dire lorsque qu'on retrouve une séquence de jours consécutifs dont la longueur est supérieure à $j_{max,A}$. L'automate fini pour cette contrainte lorsque $j_{max,A} = 4$ est représenté à la Figure 1. L'expression régulière représentant cet automate prend la forme `[01]*1{5,}[01]*`.

On obtient, pour chaque type de travailleur, une liste de vecteurs à laquelle on ajouter le vecteur nul, représentant la situation où l'employé est exclus de l'horaire.

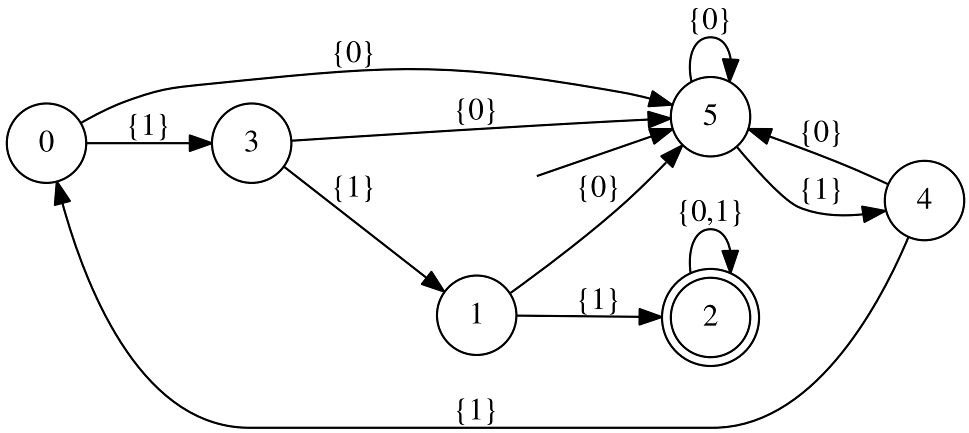

FIGURE 1 – Automate fini d'un horaire où $j_{max,A} \leq 4$ n'est pas respecté

1.3.4 Ajout des périodes

On considère la matrice des horaires quinzomadaires valides (8) et la matrice des $n_{hq,A}$ horaires quotidiens valides (9), on obtient un tableau d'horaires par périodes travaillées valides $\mathbf{V}_A \in \mathbb{N}^3$ par le produit tensoriel (10)

$$\mathbf{H}_A = \left(\vec{H}_A\right) \tag{8}$$

$$\mathbf{Q}_A = \begin{bmatrix} q_{1,1} & \cdots & q_{P,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1,n_{hq,A}} & \cdots & q_{P,n_{hq,A}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{H}_A \otimes \mathbf{Q}_A \tag{10}$$

1.4 Contraintes

Chaque horaire d'employé doit d'abord correspondre à un horaire valide tel qu'établi à la section 1.3. Il doit donc satisfaire une contrainte TABLEAU (11).

$$\mathcal{C}_1 : \textsc{Tableau}\left(\mathbf{V}_A, \begin{bmatrix} x_{e,1,1} & \cdots & x_{e,1,J} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{e,P,1} & \cdots & x_{e,P,J} \end{bmatrix}\right) \qquad \forall e \tag{11}$$

La planification doit aussi satisfaire la demande en employés, en utilisant une contrainte SUM (12).

$$\mathcal{C}_2 : \sum_A \sum_{e=1}^{E_A} x_{e,p,j} = d_{p,j} \qquad \forall 1 \leq p \leq P, 1 \leq j \leq J \tag{12}$$

1.5 Fonction objectif

La fonction objectif (13) que nous désirons minimiser est le coût total des employés, ce qui équivaut à la somme des salaires et des coûts fixes pour chaque type d'employé.

$$\arg\min_{\mathbf{x}} \sum_A \left(s_A \sum_{e=1}^{E_A} \sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{J} x_{e,p,j} + f_A \sum_{e=1}^{E_A} \left[\sum_{p=1}^{P} \sum_{j=1}^{J} x_{e,p,j} > 0 \right] \right) \tag{13}$$

2 Génération de scénarios d'absences

On génère des scénarios d'absences $\vec{B}_{e,A}$ indépendants pour chaque employé e de type A (14) à l'aide d'une chaîne de Markov sur deux états (0 : indisponible, 1 : disponible) ayant la matrice de transition 15 où $p(0,0)$ correspond à la probabilité de demeurer indisponible à la période suivante et $p(1,1)$, celle de demeurer disponible. On utilise JDistLib [1] pour générer aléatoirement les valeurs de transition entre chaque période.

$$\vec{B}_{e,A} = b_{1,1}, \ldots, b_{P,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{P,2}, \ldots, b_{1,J}, \ldots, b_{P,J} \qquad \forall 1 \leq e \leq E_A \tag{14}$$

$$M = \begin{bmatrix} p(0,0) & 1 - p(0,0) \\ 1 - p(1,1) & p(1,1) \end{bmatrix} \tag{15}$$

On produit ensuite une matrice de présences $\mathbf{B}_A$ à l'aide de $\vec{B}_{e,A}$. Pour produire la grille horaire du scénario d'absence $\mathbf{X}_{abs,A}$, on effectue le produit de Hadamard entre la grille initiale et cette matrice.

$$\mathbf{B}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,A} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{E_A,A} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{X}_{abs,A} = \mathbf{X}_A \cdot B_A \tag{17}$$

On pourra répéter cette procédure plusieurs fois pour obtenir différents scénarios d'absences.

Bibliographie

[1] Roby Joehanes. *JDistlib : Java library of statistical distribution*, 2018. URL `https://sourceforge.net/projects/jdistlib/`.

[2] Charles Prud'homme, Jean-Guillaume Fages, and Xavier Lorca. *Choco Documentation*. TASC - LS2N CNRS UMR 6241, COSLING S.A.S., 2017. URL `http://www.choco-solver.org`.